Dérivation & Étude de Fonctions

Série d'exercices - 2ème BAC Sciences Physiques & SVT

VISITEZ LE SITE WEB OFFICIEL
www.abdolive.com
Exercices corrigés, cours & devoirs

Calcul des dérivées des fonctions usuelles

Exercice 1 :

Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3x+5}$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = x - \sin(x) + 2\cos(x)$; $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{\tan(x)}}{x+1}$; $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Monotonie & signe de la dérivée

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$$

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 7$$

Signe d'une fonction & Équations

Exercice 3 :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $-3{,}2 \leq \alpha \leq -3$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+2}{x^3+x}$.

1. Déterminer D_f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.
4. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
   (b) Vérifier que $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(x^3+x)^2}$.
   (c) Déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que : $f(\alpha) = -2 + \frac{3(1-2\alpha)}{\alpha^2+1}$.
6. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'axe des abscisses.
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
8. Déterminer selon les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Fonction réciproque & Étude globale

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces résultats.
3. (a) Étudier la dérivabilité à droite de f en 0 et interpréter le résultat.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
   (c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (d) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. (a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$, montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion I à déterminer, et étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$.
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0,1[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Donner le tableau de variations de g^{-1}.
   (c) Calculer $g\left(\frac{1}{4}\right)$ et $g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.
   (d) Montrer que :

$$\forall x \in J \quad g^{-1}(x) = \frac{1 + 2x^2 - \sqrt{1+4x^2}}{2x^2}$$

   (e) Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Étude complète & Géométrie de courbe

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$, $(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en 5. Préciser les demi-tangentes en ces points.
3. Étudier les variations de f.
4. Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
5. Démontrer que les droites $(\mathcal{D}_1) : y = x - 3$ et $(\mathcal{D}_2) : y = -x + 3$ sont des asymptotes obliques à $(\mathcal{C}_f)$.
6. Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe avec les asymptotes (A ayant une abscisse supérieure à 3).
7. Soit $K(3, 0)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [1, 5]$, le point $M(x, f(x))$ est à une distance constante du point K.
   (b) En déduire la nature géométrique de $(\mathcal{C}_f)$ lorsque $1 \leq x \leq 5$.
8. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes en faisant figurer les points A et B.

Étude de fonctions auxiliaires

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 9x + (15 - 2x)\sqrt{x}$$

et la fonction g définie également sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 18\sqrt{x} - 6x + 15$$

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction g.
2. Démontrer, sans la résoudre, que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.
3. Fournir un encadrement au centième de α.
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
5. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

6. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.